UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

CARRERA DE INGENIERÍAS

ASIGNATURA: ECUACIONES DIFERENCIALES

PERIODO ACADÉMICO

DOCENTE: M.Sc. FREDY SUNTAXI

OBJETIVOS

Clasificar ecuaciones diferenciales según el tipo, orden y linealidad, además reconocer si la solución de la ED esta de forma explícita o implícita.

Verificar si la solución de ED es válida, para ello se debe derivar la solución y evaluar en la ED original a fin de obtener una identidad.

UNIDAD N.-1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

Definiciones, representación y clasificación de las ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN. Una ecuación que contenga las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, es una ecuación diferencial.

Clasificación según el tipo.

- **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).** Es aquella ecuación diferencial que contiene solo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes **con respecto a una sola** variable independiente.

Ejemplos:

✓ $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

✓ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$

✓ $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$

- **Ecuación Diferencial Parcial (EDP).** Es aquella ecuación diferencial que contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes **con respecto de dos o más** variables independientes.

Ejemplos:

✓ $\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$

✓ $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt}$

✓ $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$

Clasificación según el orden. El orden de una ecuación diferencial (EDO o EDP) está representado por el orden de la derivada más alta presente en la ecuación.

Ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

segundo orden — primer orden

- En forma general una EDO de **n**-ésimo orden se expresa: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$
- En forma normal una EDO de **n**-ésimo orden se expresa: $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ O como: $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$.

De forma específica tenemos:

EDO de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

EDO de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

Clasificación según su linealidad.

Se dice que una ecuación diferencial de orden "**n**" es lineal si **F** es lineal en **y, y´,…,y$^{(n)}$**. Esto es, la variable dependiente **y** así como todas sus derivadas son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucra a **y** es **1**. Además, los coeficientes **a_0, a_1, … , a_n** de **y, y´,…,y$^{(n)}$** dependen exclusivamente de la variable independiente **x**. Lo que se explica:

Si n=1, tenemos:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Si n=2, tenemos:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

El **grado** de una ecuación diferencial está dado por el exponente de la mayor derivada.

Ejemplos:

- ✓ $(y - x)dx + 4xdy = 0$
- ✓ $y'' - 2y' + y = 0$
- ✓ $\frac{d^3y}{dx^3} + 3x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$

Una EDO no lineal simplemente es una ecuación que no es lineal. Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como $\boldsymbol{y}$ o $\boldsymbol{e^y}$, no pueden aparecer en una ecuación lineal.

Ejemplos:

$(1 - y)y' + 2y = e^x,$

Termino no lineal:
el coeficiente depende de "***y***"

$\frac{d^2y}{dx^2} + sen\,(y) = 0,$

término no lineal:
función no lineal de "***y***"

$\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$

término no lineal:
potencia diferente de **1**

Ejercicios:

Complete la siguiente tabla de Ecuaciones Diferenciales.

Ecuación diferencial	Tipo	Orden	Grado	Lineal o no lineal
$\frac{dy}{dx} = e^x$	EDO	primer	uno	lineal
$\frac{dy}{dx} = e^y$				
$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt} + kx + \frac{dy}{ds}$				
$x^2y'' - 2xy' + y = 0$				
$yy'' - x^2y' = x$				
$\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{ds^2} = c$				
$(y'''')^3 + y''' - y'' - y^2 = 0$				

Solución de una EDO.

Cualquier función $y = \varphi(x)$, definida sobre un intervalo I y que posea al menos **n** derivadas continuas sobre I, y que al **sustituirse** un una EDO de **n**-ésimo orden, reduce la ecuación a una **identidad** $F\left(x, y, \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$, se dice que, es una **solución** de la ecuación en el intervalo.

Solución explícita

Ejemplos:

EDO	Solución explícita
$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$	$y = \frac{x^4}{16}$
$xy' + y = 0$	$y = \frac{1}{x}$
$y'' - 2y' + y = 0$	$y = e^x$

Solución implícita

Ejemplo:

EDO	Solución implícita
$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$	$x^2 + y^2 = 25$

También existen la solución trivial (y = 0), particular (libre de parámetros arbitrarios) y singular (solución que no es miembro de una familia de soluciones).

Ejemplo:

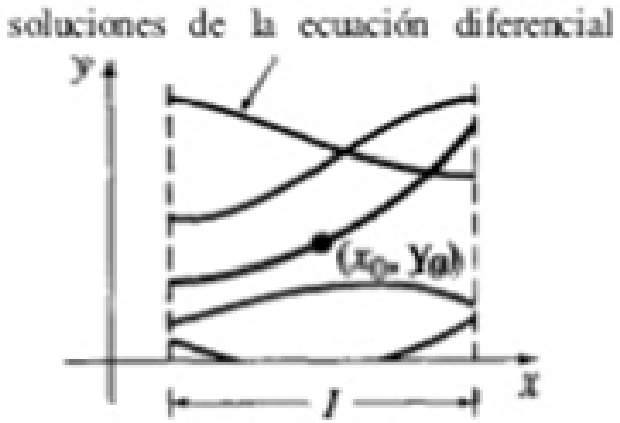
Familia de un solo parámetro $y = cx - x\cos(x)$ representa una solución explícita de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' - y = x^2\, sen(x)$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

El PVI de primer orden se expresa de la siguiente manera:

Resolver: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Sujeto a: $y(x_0) = y_0$

En este caso buscamos una solución de la ED sobre un intervalo ***I*** que contenga a x_0, de modo que una curva de solución cruce a través del punto establecido (x_0, y_0).

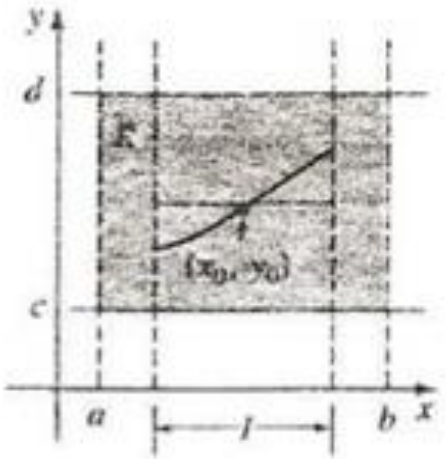


Ejemplo:

La familia de un solo parámetro $\boldsymbol{y = \frac{c}{x} + 1}$ representa una solución explícita de la ecuación diferencial lineal de primer orden $\boldsymbol{xy' + y = 1}$. Obtenga la solución para PVI $\boldsymbol{y(1) = -2}$.

<u>TEOREMA: EXISTENCIA DE UNA SOLUCÍON ÚNICA</u>

Establecemos a R como una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, la cual contiene al punto (x_0, y_0). Si $f(x, y)$ y $\frac{df}{dy}$ son continuas en R, entonces existe cierto intervalo I_0 tal que, $x_0 - h < x_0 + h < h$, con $h > 0$, contenido en $a \leq x \leq b$, y una función única $y(x)$ definida en I_0 que representa una solución del problema de valor inicial.



Referencias:

D. Zill, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Editorial Mcgraw-Hill, México, Octava Edición, 2012.

E. Kreyszig, Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería, Vol. I, Editorial Limusa Wiley, México, Cuarta Edición, 2013.

TEXTO VIRTUAL
https://bibliotecas.ups.edu.ec:3488/es/ereader/bibliotecaups/39438

TEXTO VIRTUAL
https://bibliotecas.ups.edu.ec:3488/es/ereader/bibliotecaups/174406

TEXTO VIRTUAL
https://bibliotecas.ups.edu.ec:3488/es/ereader/bibliotecaups/40023